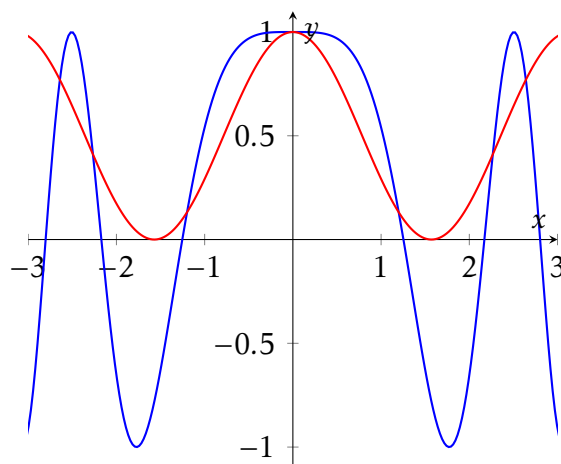


Opgaver til kursusgang 8: Funktioner 2 (sammensat og invers)

1. Det oplyses at $f(1) = 2$, $f(4) = 1$, $g(1) = 1$ og $g(2) = 4$ for to funktioner f og g . Bestem
 - (a) $f(g(2))$
 - (b) $g(f(1))$
 - (c) $g(f(f(4)))$
2. Bestem $(f \circ g)(x)$ og $(g \circ f)(x)$ hvor $f(x) = 3x$ og $g(x) = 4x^2 + 2x - 1$.
3. Om funktionen f oplyses at $f(1) = 8$, $f(2) = 4$, $f(3) = 5$. Bestem $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(5)$ og $f^{-1}(8)$.
4. Bestem en forskrift for den inverse funktion til hver af de følgende funktioner
 - (a) $f(x) = 2x - 8$
 - (b) $h(x) = \frac{1-2x}{x+4}$
5. Lad f, g være givet ved $f(x) = x^2$ og $g(x) = \frac{1}{1+x}$ hvor $x > 0$. Er $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?
6. Lad $f(x) = x^2$ og $g(x) = \cos(x)$. På Figur 1 er graferne for $f \circ g$ og $g \circ f$ plottet. Bestem for hver graf den tilhørende funktionsforskrift.



Figur 1: Opgave 6

7. Lad f, g, h være funktioner defineret på $]0, \infty[$ givet ved

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x}, \\ g(x) &= \frac{1}{1+x}, \\ h(x) &= \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2. \end{aligned}$$

Bestem forskriften for følgende funktioner:

- (a) $f \circ g$,

(b) $g \circ f$,

(c) $h \circ g$,

(d) $g \circ g$.

8. Bestem den inverse funktion til $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$ givet ved $f(x) = x^{-1}$. (Hint: Udregn $f(f(x))$.)

9. Vis at funktionerne $f: \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ og $g: \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ givet ved

$$f(x) = \frac{x-1}{1-2x}, \quad g(x) = \frac{x+1}{1+2x},$$

er inverse funktioner.

10. Lad $f(x) = \cos((x-2)^2)$

(a) Bestem funktioner g, h så $f(x) = g(h(x))$.

(b) Bestem to andre funktioner g_1, h_1 så $f(x) = g_1(h_1(x))$

(c) Bestem tre funktioner f_1, f_2, f_3 så $f(x) = f_1(f_2(f_3(x)))$

11. Lad funktionen $f(x) = e^{x^2}$ og bestem funktioner g og h så $f(x) = (g \circ h)(x)$.

EKSTRAOPGAVER:

12. Lad $f: \mathbf{R} \rightarrow [-2, \infty[$ være givet ved $f(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ og lad $g: [-2, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ være givet ved $g(x) = \sqrt{x+2}$.

(a) Bestem definitionsmængde, værdimængde og funktionsforskrift for $f \circ g$

(b) Er g og f inverse funktioner? (Hint: hvad er $(g \circ f)(-1)$?)

(c) Bestem en passende definitionsmængde D så $f: D \rightarrow [-2, \infty[$ er invers til g .

13. Betragt funktionerne $f: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ og $g: [0, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ givet ved $f(x) = x^{3/2}$ og $g(x) = x^{2/3} + 1$.

(a) Bestem det størst mulige domæne D for funktionen $h: D \rightarrow \mathbf{R}$ givet ved $h(x) = x - 1$ så sammensætningen $f \circ h$ er defineret.

(b) Vis at $g^{-1}(x) = (f \circ h)(x)$.