

Lektion 1 - Brøker

I dette dokument findes links til supplerende materiale, samt hjælp til regnearternes hierarki.

Supplerende Materiale

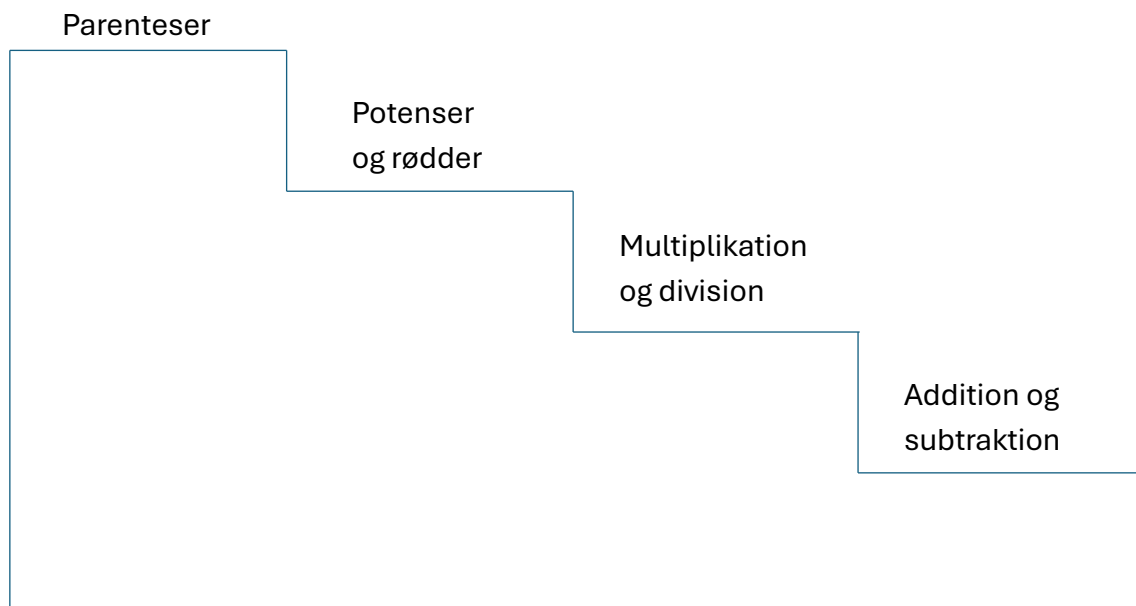
Algebra Foundations - Khan Academy:

<https://www.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:foundation-algebra>

(Hver opmærksomme på, at Khan Academy følger en anden rækkefølge end dette kursus, så der kan blive refereret til emner, der ikke er gennemgået endnu)

Regnearternes Hierarki - Lektion 0

Når vi simplificerer udtryk eller løser ligninger er det vigtigt at holde styr på rækkefølgen af forskellige operationer. Her kommer regnearternes hierarki ind i billedet:



Man kan forestille sig, at man starter øverst på trappen og bevæger sig nedad, når man regner (altså først udregner man ting i parenteser, så potenser/rødder, så multiplikation/division, etc.).

Eksempel:

Udregn:

$$(3 \cdot 2 - 2)^2 \cdot 3$$

Vi starter med at udregne, det der står i parentes. Indenfor parentes, skal vi igen overholde regnearternes hierarki. Det vil sige, vi starter med multiplikationsstykket, så subtraktion:

$$3 \cdot 2 - 2 = 6 - 2 = 4$$

Vores regnestykke er da:

$$(3 \cdot 2 - 2)^2 \cdot 3 = 4^2 \cdot 3$$

Nu er der ikke nogen parenteser, så vi starter med at løse potensen:

$$4^2 = 16$$

Da bliver regnestykket:

$$4^2 \cdot 3 = 16 \cdot 3 = 48$$

Rækkefølger på operationer på samme trin:

Når man arbejder med regnearternes hierarki, er der nogle ting, der kan være en hjælp at huske. Man må i udgangspunktet ikke blande operation fra lavere trin på trappen med dem fra højere trin. Det vil sige:

$$\frac{a}{b} + c \neq \frac{a + c}{b}$$

Men man må gerne blande rækkefølgen på operationer på samme trin på stigen. Det vil sige, at har man en række multiplikationer og divisioner, må man frit vælge, hvilken rækkefølge, man foretager dem i. Det vil sige:

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e} = \frac{b}{e \cdot d} \cdot a \cdot c = \frac{a \cdot b}{d} \cdot \frac{c}{e} = \frac{a \cdot b}{e} \cdot \frac{c}{d} = \dots$$

Så længe vi holder d og e under brøkstregen, og de andre variable over brøkstregen må vi selv bestemme den rækkefølge, vi regner i. Det samme gælder for addition og subtraktion:

$$a + b - c + d = -c + a + d + b = d - c + b + a = \dots$$

Her skal vi altid have et minus foran c og plus foran de andre variable. Eller rødder og potenser:

$$\sqrt[a]{\sqrt[b]{(x^c)^d}} = \sqrt[b]{\sqrt[a]{(x^d)^c}} = \sqrt[a]{\left(\sqrt[b]{x^d}\right)^c} = \left(\left(\sqrt[b]{x^d}\right)^c\right)^{\frac{1}{a}} = \dots$$

Man skal passe på med at forveksle det med at man må bytte rundt på to operationer på samme trin (altså trække fra i stedet for at lægge til). Det er kun rækkefølgen, vi må bytte rundt på. Det vil altså sige at udover nogle specialtilfælde for a og b vil der gælde:

$$a - b \neq b - a$$

$$\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$$

$$\sqrt[a]{x} \neq x^a$$

Måden, man kan anvende det at bytte rundt på rækkefølgen af operationer på samme trin i regnearternes hierarki, er til reduktion af udtryk. Det illustreres bedst med nogle eksempler.

Eksempel 1:

Reducer følgende udtryk mest muligt:

$$a + b - c - 2 \cdot c + b - a$$

Her ser vi, at der er en række tal, der bliver lagt sammen og trukket fra hinanden. Med vores viden, om at vi må bytte rundt på rækkefølgen, kan vi nemt se, at a bliver både lagt til og trukket fra. Selvom det er forskellige steder i regnestykket, kan vi nemt lade de to instanser af a gå ud med hinanden.

$$a + b - c - 2 \cdot c + b - a = a - a + b - c - 2 \cdot c + b = b - c - 2 \cdot c + b$$

Det samme gælder for de 2 b , som vi kan lægge sammen selvom de står forskellige steder i udtrykket.

$$b - c - 2 \cdot c + b = b + b - c - 2c = 2b - c - 2c$$

Med den viden kan vi til sidste reducere udtrykket til:

$$2b - c - 2c = 2b - 3c$$

Eksempel 2:

Reducer følgende udtryk mest muligt:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} \cdot b \cdot \frac{d}{c}$$

Her ser vi igen, at der både er et a i tælleren på en brøk og i nævneren på en brøk. Vi ved at $\frac{a}{a} = 1$, så det vil forsvinde fra udtrykket. Det samme gælder for c , som også er tilstede både i en tæller og en nævner. Vi ved også at vi selv må bestemme rækkefølgen vi ganger og dividerer i. Det vil sige, at vi må omskrive udtrykket som:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} \cdot b \cdot \frac{d}{c} = \frac{a}{a} \cdot \frac{c}{c} \cdot b \cdot \frac{d}{b} = b \cdot \frac{d}{b}$$

Med de samme regler må vi omskrive:

$$b \cdot \frac{d}{b} = \frac{b}{b} \cdot d = d$$

Huskeregler for parenteser med operationer fra lavere trin:

Vi ved, at vi altid skal starte fra toppen af trappen, når vi ser et regnestykke. Der er dog en lille huskeregel, man kan bruge når man har en parentes med operationer fra et trin uden på og operationer fra trinnet lige under indeni. Det vil sige regnestykker på formen:

$$a \cdot (b \pm c)$$

$$\frac{(b \pm c)}{a}$$

$$(b \cdot c)^a$$

$$\sqrt[a]{b \cdot c}$$

$$\left(\frac{b}{c}\right)^a$$

$$\sqrt[a]{\frac{b}{c}}$$

Her vil der gælde, at vi må foretage den operation, der står udenpå parentesen på begge de tal, der er indeni. Det vil sige, at for de ovenstående udtryk, gælder der:

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$$

$$\frac{(b \pm c)}{a} = \frac{b}{a} \pm \frac{c}{a}$$

$$(b \cdot c)^a = b^a \cdot c^a$$

$$\sqrt[a]{b \cdot c} = \sqrt[a]{b} \cdot \sqrt[a]{c}$$

$$\left(\frac{b}{c}\right)^a = \frac{b^a}{c^a}$$

$$\sqrt[a]{\frac{b}{c}} = \frac{\sqrt[a]{b}}{\sqrt[a]{c}}$$

Man skal dog være opmærksom på, at reglerne kun gælder hvis operationerne inde i parenteser er fra trinnet lige under operationerne udenpå parenteser. Det vil sige at:

$$(b \pm c)^a \neq b^a \pm c^a$$

$$\sqrt[a]{b \pm c} \neq \sqrt[a]{b} \pm \sqrt[a]{c}$$

Udover kvadratsætninger, som bliver gennemgået i Lektion 2, er der ikke nogen nemme huskereglere for at reducere denne type udtryk. Som følge af ovenstående regler for parenteser med summer opløftet i potenser, skal man være varsom med at forveksle:

$$\frac{(b \pm c)}{a} = \frac{b}{a} \pm \frac{c}{a}$$

Med:

$$\frac{a}{(b \pm c)} \neq \frac{a}{b} \pm \frac{a}{c}$$

De to sider af det nederste udtryk ovenfor er ikke lig med hinanden. For det øverste udtryk gælder, at operationen inden parenteser er på trinnet lige under operationen udenpå parenteser i regnearternes hierarki. Derfor må vi dividere ind på hvert led. Men for det nederste af de to udtryk gælder der, at det kan omskrives:

$$\frac{a}{(b \pm c)} = a \cdot \frac{1}{(b \pm c)} = a \cdot (b \pm c)^{-1}$$

Her der altså tale om, at det der sker udenpå parenteser kan repræsenteres som en potens, mens det, der sker indeni, er en sum/differens. Derfor må vi ikke dele den op på samme måde, og man bliver nødt til at regne det inde i parenteser først.