

Facit til kursusgang 20: Vektorer i rummet 1

1. Svarene er:

$$\begin{bmatrix} 21 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \sqrt{66}, \quad \sqrt{69}, \quad 45, \quad \begin{bmatrix} 12 \\ -48 \\ -9 \end{bmatrix}$$

2. Nej

3. Løs ligningen:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ t \end{bmatrix} = 0$$

Denne har løsningen $t = -7$.

4. Prikker vi vektorerne $\vec{u} + t\vec{v}$ og $\vec{u} - t\vec{v}$ får vi ligningen

$$0 = 4 - t^2 + 4 - 4t^2 + 16 - t^2 = 24 - 6t^2.$$

Denne har løsningerne $t = \pm 2$.

5. Vi har at

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \|\vec{u} \times \vec{v}\| = 5\sqrt{5}.$$

6. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Så er

$$\vec{u} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} u_2 u_3 - u_3 u_2 \\ -(u_1 u_3 - u_1 u_3) \\ u_1 u_2 - u_1 u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7. Vi har at

$$\vec{u} \times t \cdot \vec{v} = t \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \|\vec{u} \times t\vec{v}\| = |t|\sqrt{22}.$$

Dermed har parallelogrammet areal 3 for $t = \pm \frac{3}{\sqrt{22}}$.

8. Svarene er

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad 9, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad -18.$$

EKSTRAOPGAVER:

9. Vi har at

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

10. Vi har at

$$\|k\vec{u}\| = \sqrt{k^2 u_1^2 + k^2 u_2^2 + k^2 u_3^2} = \sqrt{k^2} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = |k| \|\vec{u}\|.$$

11. Bemærk først at $\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \|\vec{u}\|^2$. Bruger vi dette får vi

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 + (u_3 + v_3)^2 \\ &= u_1^2 + v_1^2 + 2u_1 v_1 + u_2^2 + v_2^2 + 2u_2 v_2 + u_3^2 + v_3^2 + 2u_3 v_3 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}). \end{aligned}$$

12. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Så er

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

og vi får

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = u_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0,$$

samt

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = v_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + v_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + v_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0.$$