

Opgaver til kursusgang 7: Funktioner 1 (injektivitet, surjektivitet, sum, produkt)

1. To mængder er givet ved:

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\},$$

$$B = \{\text{Hund, Hest, Struds, Fugleedderkop, Laks, Mariehøne}\}$$

Bestem om følgende sammenhænge mellem A og B er funktioner. I bekræftende fald bestem også om de er injektive og/eller surjektive.

- (a) Lad $f: B \rightarrow A$ være givet ved

$$f(x) = \text{antal ben } x \text{ har.}$$

- (b) Lad $g: A \rightarrow B$ være givet ved

$$\begin{aligned} g(0) &= \text{Hund}, & g(2) &= \text{Struds}, & g(4) &= \text{Laks}, \\ g(6) &= \text{Fugleedderkop}, & g(8) &= \text{Hest} \end{aligned}$$

- (c) Lad $h: A \rightarrow B$ være givet ved at

$$h(x) = \text{Dyrene i } B \text{ som har } x \text{ ben.}$$

2. Kan cirklen med ligning $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ beskrives som grafen af en funktion? Begrund svaret.
3. Lad $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og $B = \{3, 5, \pi, 1, -1\}$. Bestem en funktion $f: A \rightarrow B$ således at
- (a) f er injektiv og surjektiv.
 - (b) f er hverken injektiv eller surjektiv.
4. Figur 1 viser forskellige kurver i planen. Argumenter for hvilke kurver der beskriver grafen for en funktion.
5. Bestem en mængde $D \subset \mathbf{R}$ således at funktionen $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ givet ved $f(x) = x^2$ bliver injektiv.
6. Bestem den størst mulige definitionsområde for funktionerne

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}, \quad g(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad h(x) = \frac{2}{\sqrt{x + 2}}.$$

7. Bestem værdimængden for funktionen $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ givet ved $f(x) = -3x^2 + 9$.
8. To funktioner er givet ved: $f(x) = x^2 - 1$ og $g(x) = \frac{1}{1+x}$. Bestem

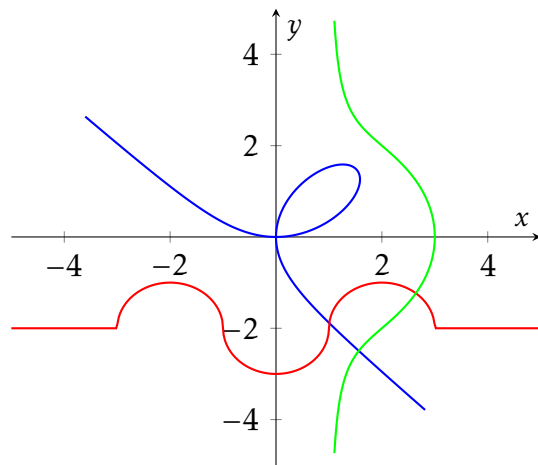
- (a) $(f + g)(2)$
- (b) $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$
- (c) $(fg)(0)$

(d) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

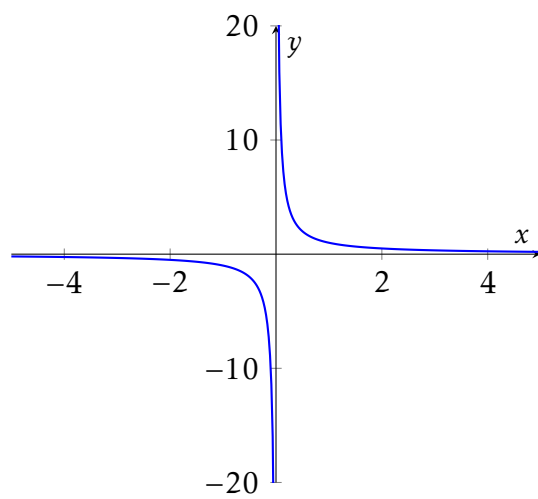
(e) $(g - f)(x)$.

EKSTRAOPGAVER:

9. På Figur 2 ses grafen for funktionen $f(x) = x^{-1}$. Brug grafen til at afgøre om f er injektiv, surjektiv og/eller bijektiv på $\mathbf{R}$. Hvis ikke f er bijektiv bestem så det størst mulige domæne og codomæne således at f bliver bijektiv.
10. Skitser grafen for en funktion som opfylder alle nedenstående punkter:
- (a) har domæne $[-2, 4[$, og codomæne $[-2, 4]$,
 - (b) går gennem punkterne $(-1, 3)$ og $(2, -2)$,
 - (c) skærer y-aksen i -2 ,
 - (d) ikke skærer x-aksen.



Figur 1: Opgave 4.



Figur 2: Opgave 9.