

Facit til kursusgang 26: Bestemte integraler 2

1. Svarene er:

$$60, \quad \frac{242}{5}, \quad 2\ln(2) - \frac{3}{4}$$

2. Svarene er:

$$\frac{\sqrt{2}-2}{2}, \quad 1, \quad \frac{1}{24}$$

3. Svarene er:

$$\frac{52}{3}, \quad \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right), \quad \frac{1}{4}.$$

4. Svaret er -2 .

5. Svarene er:

$$-2\pi, \quad 2\ln(2) - \frac{3}{4}, \quad 64\ln(4) - 21.$$

6. Svarene er:

$$4 - 6\ln(3), \quad 20\sqrt{30}.$$

EKSTRAOPGAVER:

7. Hvis $u = -x$ så er $-du = dx$ hvilket giver at

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-u) du = - \int_a^0 -f(u) du = \int_a^0 f(u) du = - \int_0^a f(u) du.$$

Da u bare er navnet på variabelen kunne vi lige så godt kalde den for x . Dermed får vi

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx.$$

Bruger vi opgave 7 fra 25. kursusgang får vi at

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

8. Da alle funktionerne der integreres er ulige og intervallerne der integreres over er symmetriske om y -aksen giver alle integralerne 0.

9. Hvis $u = -x$ så er $-du = dx$ hvilket giver

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-u) du = - \int_a^0 f(u) du = \int_0^a f(u) du.$$

Da u bare er navnet på variablen kunne vi lige så godt kalde den for x . Dermed får vi

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx.$$

Bruger vi opgave 7 fra 25. kursusgang får vi at

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= 2 \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

10. Svarene er:

$$4, \quad \frac{1}{24}$$

11. Svarene er:

(a) $f(-x) = (-x)^{-2} \sin(\frac{1}{-x}) = -x^{-2} \sin(\frac{1}{x}) = f(x).$

(b) $F(x) = \cos(\frac{1}{x}).$

(c) I opgave 7 var det en antagelse at funktionen vi betragtede var kontinuert, men f er ikke kontinuert.

12. Hvis $u = \sqrt{x}$ så er $2u du = dx$, hvilket giver at

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^1 u e^u du = 2[(u-1)e^u]_0^1 = 2.$$

13. Hvis $u = \sqrt{x}$ så er $2u du = dx$, hvilket giver at

$$\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx = \int_0^{\pi} u \sin u du = [\sin u - u \cos u]_0^{\pi} = 2\pi.$$

14. I denne opgave vil vi beskrive arealet af en cirkel med vilkårlig radius.

(a) Den øvre halvdel af enhedscirklen kan beskrives med funktionen $y = \sqrt{1-x^2}$. integrerer vi denne funktion fra 0 til 1 må vi få en fjerdedel af cirklen areal. Dermed er

$$4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi.$$

- (b) Den øvre halvcirkel kan beskrives som funktionen $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Integrerer vi dette fra 0 til r og ganger med 4 må vi få arealet af hele cirklen. Altså er

$$A = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4r \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} dx,$$

og hvis vi substituer $u = \frac{x}{r}$ så er $rdu = dx$ og dermed får vi ved at anvende del (a) at

$$A = 4r \int_0^1 r \sqrt{1 - u^2} du = r^2 \pi.$$

15. Svarene er:

- (a) Hvis $a = b$ kan ellipsens ligning omskrives til

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

- (b) Den øvre halvellipse kan beskrives som funktionen $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Integrerer vi dette fra 0 til a og ganger med 4 må vi få arealet af hele cirklen. Altså er

$$A = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx,$$

og hvis vi substituer $u = \frac{x}{a}$ så er $adu = dx$ og dermed får vi ved at anvende del (a) i forrige opgave at

$$A = 4b \int_0^1 a \sqrt{1 - u^2} du = ab\pi.$$

- (c) Hvis $a = b$ så har vi vist at ellipsen bliver en cirkel med radius $a = b$, hvorfor formelen πab for ellipser generaliserer formelen πa^2 for cirkler.

16. Arealet er $\pi^2 - 4$.

17. Først omskriver vi $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$. Ved at integrere får vi at

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x) dx = \left[-\frac{1}{4} \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8}.$$