Facit til kursusgang 31 + 32: Repetition

1. Svarene er:

$$-\frac{1}{12}, \qquad \frac{1}{2}, \qquad \frac{11}{6}.$$

2. Svarene er:

$$x = 25, \qquad x = 2, x = -\frac{1}{2}, \qquad x = 1, x = -3, \qquad x = \pm 2, x = \pm\sqrt{2}.$$

3. Svarene er:

$$\frac{x-2}{x+3}, \qquad -\frac{x+3}{x+1}.$$

4. Svarene er:

$$27x^6, \qquad y^-1, \qquad \sqrt{x}.$$

5. Svarene er:

$$x = 2, y = \frac{-1}{2}.$$

6. g er surjektiv men ikke injektiv og f er hverken injektiv eller surjektiv.
7. Svarene $h(g(-1)) = -1$ og $g(f(3)) = 2$.
8. Svarene er

$$f(g(x)) = \frac{1}{1+\cos^4(x)}, \qquad g(f(x)) = \cos^2(\frac{1}{1+x^2}).$$

9. Svarene er:

$$6, \qquad 27, \qquad e^{\frac{1}{\ln(e^{-3})}} = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

10. Svarene er:

$$x = 1, \qquad x = \frac{1}{2}.$$

11. Svarene er:

$$\frac{3}{2}, \qquad 3.$$

12. Funkionen f er kontinert på mængden $\mathbf{R} \setminus 0, 1, 2$, altså i alle punkter undtagen 1,2 og 3.
13. Svaret er: $\lim_{x\to 2} xe^{x^2-4} - x = 0$.

14. Svarene er:

$$f'(x) = 4x + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}, \qquad g'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \sin(x), \qquad h'(x) = \frac{3}{2x} + 4xe^{2x^2}.$$

15. Svarene er:

$$f'(x) = 2x(1 + \tan^2(x^2)), \quad g(x) = e^{2\sin(x)}(\sin(2x) + \cos(x)), \quad h(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

16. (a) Den første blå og den første røde hører sammen.
    (b) Den anden blå og den tredje røde hører sammen.
    (c) Den tredje blå og den anden røde hører sammen.

17. Svaret er: $(f \circ g)'(3) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{6}$.

18. Det ses let at $f'(x) = 2x - 4$ så $f'(x) = 0$ har løsningen $x = 2$. Vælger vi punkterne $x_1 = 0$ og $x_2 = 3$ ser vi at $f'(x_1) = -4$ og at $f(x_2) = 2$. Dette giver monotonilinjen som ses i Tabel 1. Vi ser dermed at f er aftagende i intervallet $]-\infty, 2]$ og voksende i intervallet $[2, \infty[$. Tangenten gennem punktet $(1, f(1))$ har forskriften

$$y = -2(x-1) + 1 = -2x + 3.$$

x	0	2	3
$f'(x)$	-4	0	2
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Tabel 1: Opgave 18.

19. Ved at undersøge kritiske punkter og interval endepunkter ses det at maksimumsværdien antages i $x = 1$ samt at $f(1) = 9$. Yderligere ses det at minimumsværdien tages i $x = -\frac{1}{3}$ samt at $f(-\frac{1}{3}) = \frac{11}{3}$.

20. Lad a og b være givet som i Figur 1 i.e. b er højden af rektanglet og a er halvdelen af længden. Ved at anvende trekantsberegninger får vi at

$$\tan(\frac{\pi}{3}) = \frac{b}{\frac{1}{2} - a}.$$

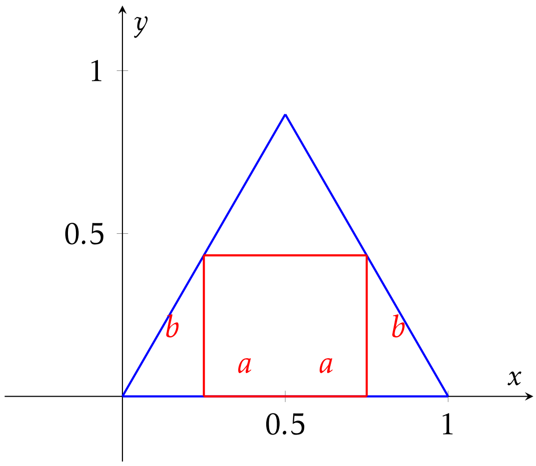
Isolerer vi b får vi at

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}a.$$

Arealet af rektanglet kan dermed beskrives ved følgende funktion af a:

$$A(a) = 2a(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}a) = \sqrt{3}a - 2\sqrt{3}a^2.$$

Ved at anvende den sædvanlige optimeringsmetode finder vi at A tager sit maksimum når $a = \frac{1}{4}$. Dette giver et maksimalt areal på $A(\frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{8}$.



Figur 1: Opgave 20

21. Nej.

22. Svarene er:

$$\frac{1}{3}x^3 + x + c, \qquad \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \cos(x) + c, \qquad e^{\frac{x}{2}} + c.$$

23. Svarene er:

$$x\sin(x) + \cos(x) + c, \qquad \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + c.$$

24. Svarene er:

$$e^{x^3+3x-1} + c, \qquad \frac{1}{2}(x^2\ln(x^2) - x^2) + c, \qquad -e^{-(x^4+x^2-x)} + c.$$

25. Svarene er:

$$\frac{8}{3}, \qquad 0, \qquad 2e^{-1} - 1.$$

26. Svarene er:

$$1 - e, \qquad 0.$$

27. Vi har at

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) - \sin(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(x) - \cos(x)\,dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \cos(x) - \sin(x)\,dx \\
&= [\sin(x) + \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos(x) - \sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + [\sin(x) + \cos(x)]_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \\
&= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) \\
&= 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

28. Den fuldstændige løsning er $y(x) = ce^{-3x}$ hvor $c \in \mathbf{R}$. Da man blot bliver bedt om at finde en løsning kunne man være doven og vælge $y(x) = 0$.

29. Ved at anvende kædereglen ses at $f'(x) = -e^x e^{-e^x}$. Indsætter vi f og f' i differentialligningen får vi

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{-e^x e^{-e^x}}{e^{-e^x}} = -(-e^x) = e^x.$$

30. Funktionerne y_1 og y_2 er løsninger.

31. Tangentligningen har forskriften $y = \ln(2)$.

32. Vi har at

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \frac{d}{dx}\cos(x) = -sin(x) = -y_2(x) \\ y_2'(x) &= \frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) = y_1(x). \end{aligned}$$

Derudover er det velkendt at $\cos(0) = 1$ og $\sin(0) = 0$.

33. Bruger vi Panzerformlen får vi at

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\int xe^{\frac{1}{2}x^2}\,dx + ce^{-\frac{1}{2}x^2} = e^{-\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{2}x^2} + ce^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 + ce^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

34. Bruger vi Panzerformlen får vi at

$$y(x) = e^{-\cos(x)}\int \sin(x)e^{\cos(x)}\,dx + ce^{-\cos(x)} = e^{-\cos(x)}(-e^{\cos(x)}) + ce^{-\cos(x)} = ce^{-\cos(x)} - 1.$$

35. Funktionerne y_1, y_3 og y_4 løser differentialligningen.

36. Svarene er:

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad 2\sqrt{5}, \quad \sqrt{5}, \quad 0, \quad 0.$$

37. Arealet er 5.

38. Vi har at

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0,$$

samt at

$$\begin{aligned} ||\vec{u}|| &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1, \\ ||\vec{v}|| &= \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1, \end{aligned}$$

39. Nej.

40. Svarene er:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \sqrt{6}, \qquad \sqrt{10}, \qquad -7, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

41. Arealet er $6\sqrt{3}$.

42. En mulig parameterfremstilling er

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

P ligger på linjen.

43. En mulig ligning for planen er

$$2x - y + 3z - 4 = 0$$

Punktet P_1 ligger i planen.