

Facit til kursusgang 30: Differentialligninger 4

1. Svaret er:

$$y(x) = 2 + ce^{-2x}.$$

2. Svaret er:

$$y(x) = -\frac{x}{3} - \frac{1}{9} + ce^{3x}.$$

3. Svaret er:

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + ce^{-x}.$$

4. Svaret er:

$$y(x) = 4 + ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

5. Svaret er:

$$y(x) = x^2 + \frac{c}{x}.$$

6. At der ikke er noget y led i differentialligningen svarer til at $k = 0$. Indsættes det i løsningsformlen får vi

$$y(x) = \int q(x) dx + c,$$

Hvilket viser at løsningen fås ved at integrere begge sider.

7. I opgave 4 fra 29. kursusgang så vi at $A(t) = 3e^{-4t}$. Indsættes dette i differentialligningen for B fås

$$B' = 4(3e^{-4t}) - 2B.$$

Bruger vi Panzerformlen får vi at

$$B(t) = e^{-2t} \int 12e^{-4t} e^{2t} dt + ce^{-2t} = -6e^{-4t} + ce^{-2t}$$

Begyndelsesbetingelsen $B(0) = 0$ giver at $c = 6$ så $B(t) = 6(e^{-2t} - e^{-4t})$. Ved at anvende de sædvanlige optimeringsmetoder ses at B har et globalt maksimum når $t = \ln(\sqrt{2})$ og at $B(\ln(\sqrt{2})) = \frac{3}{2}$ og at $A(t) = \frac{3}{4}$.

8. Svaret er:

$$y(x) = ce^{-x} + \ln(x).$$

9. Svaret er

$$y(x) = e^{2\ln(x)} \int \frac{-8}{x} e^{-2\ln(x)} dx + ce^{2\ln(x)} = x^2(4x^{-2}) + cx^2 = 4 + cx^2$$

10. Svaret er:

$$y(x) = \frac{c}{x} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}x \ln(x).$$

11. Svaret er:

$$y(x) = ce^{2x} - \frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1).$$

EKSTRAOPGAVER:

12. Svarene er:

(a) Funktionen f skal opfylde differentialligningen

$$f'(x) = p(x)f(x)$$

(b) Svaret er: $f(x) = e^{P(x)}$.

(c) Ved at gange differentialligningen igennem med $f(x) = e^{P(x)}$ og bruge at $f' = pf$ så får vi at

$$e^{P(x)}y'(x) + p(x)e^{P(x)}y(x) = q(x)e^{P(x)},$$

hvilket vi ved hjælp af produktreglen omskriver til

$$\frac{d}{dx}(y(x)e^{P(x)}) = e^{P(x)}q(x).$$

Integrerer vi begge sider af ligningen ovenfor fås

$$e^{P(x)}y(x) = \int q(x)e^{P(x)} dx + c$$

og dividerer vi med $e^{P(x)}$ får vi at

$$y(x) = e^{-P(x)} \int q(x)e^{P(x)} dx + ce^{-P(x)}$$

13. Svarene er:

(a) $y_h(x) = ce^{-x}$.

(b) Vi har at $y_p'(x) = -a \sin(x) + b \cos(x)$ og indsætter vi dette i ligningen fås

$$-a \sin(x) + b \cos(x) + a \cos(x) + b \sin(x) = \sin(x).$$

Ud fra denne ligning ser vi at $a = -b$ og $-a + b = 1$. Disse to ligninger har løsningen $a = -\frac{1}{2}$ og $b = \frac{1}{2}$.

(c) Vi har at

$$y(x) = e^{-x} \int \sin(x) e^x dx + c e^{-x} = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + c e^{-x}.$$

Dette er præcis den samme funktion som $y_h + y_p$.