

Lektion 2 - Kvadratsætninger

I dette dokument findes links til supplerende materiale, samt hjælp til at finde centrum og radius ud fra cirkelns ligning.

Supplerende Materiale

Quadratics: Multiplying and factoring:

<https://www.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:quadratics-multiplying-factoring>

(Hver opmærksomme på, at Khan Academy følger en anden rækkefølge end dette kursus, så der kan blive refereret til emner, der ikke er gennemgået endnu)

At finde radius og centrum fra cirkelns ligning

Man kan blive bedt om at finde centrum og radius i en cirkel med udgangspunkt i cirkelns ligning, som kan være givet på formen:

$$x^2 + y^2 + a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + d = 0$$

Fra ovenstående er det ikke åbenlyst, hvordan man kommer til det gængse udtryk for cirkelns ligning, hvorfra man nemt kan aflæse cirkelns centrumskoordinater, (a,b), og radius, r:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

En måde at gøre det på, er at regne parenteserne ud ved hjælp af kvadratsætningerne:

$$(x - a)^2 = x^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot x$$

$$(y - b)^2 = y^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x$$

Indsættes ovenstående to udtryk i det generelle udtryk for cirkelns ligning, får vi:

$$x^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot x + y^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x = r^2$$

Hvis der flyttes lidt rundt i rækkefølgen, og r^2 trækkes fra på begge sider, kan udtrykket ovenfor nemmere sammenlignes med den form, cirkelns ligning er givet på i vores udgangspunkt:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot a \cdot x - 2 \cdot b \cdot y + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + d = 0$$

I ligningerne ovenfor er leddene farvet samme farve parvist mellem de to udtryk. Filosofien er, at det altid kun er det udtryk, der har f.eks. en koefficient x i den ene ligning, som kan matche det udtryk, der har en koefficient x i den anden ligning. Og tilsvarende med de andre

koefficienter x^2, y^2, y . Leddene x^2 og y^2 går igen i begge ligninger, så disse led passer automatisk sammen mellem de to ligninger. Ideen er nu, at ved at parre de farvede led op mod hinanden, kan man finde a, b og r ved at løse tre ligninger:

$$a_2 \cdot x = -2 \cdot a \cdot x$$

$$b_2 \cdot y = -2 \cdot b \cdot y$$

$$d = a^2 + b^2 - r^2$$

På baggrund af de to første ligninger, kan man bestemme a og b, som:

$$a = -\frac{a_2}{2}$$

$$b = -\frac{b_2}{2}$$

Med disse to på plads, kan r-bestemmes som:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - d}$$

Eksempel:

Find centrum og radius for cirklen med ligningen:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$$

For at finde a, b og r, bruger vi vores viden om, at den generelle form på cirkelns ligning:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Kan omskrives til:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot a \cdot x - 2 \cdot b \cdot y + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Vi kan sammenligne med udtrykket, vi fik givet i opgaven:

$$x^2 + y^2 - 4 \cdot x + 6 \cdot y + 4 = 0$$

Vi kan nu sammenligne de to ligninger led for led. Det grønne led i begge ligninger er det eneste led, der står et enkelt x som koefficient på. Derfor må de to led skulle være lig med hinanden, hvis vi skal have udtrykket, vi har fået i opgaven til at passe med cirkelns ligning. Det samme gælder for det gule led i begge ligninger, som er det led, der står et enkelt y på som koefficient, og det lilla led, som er det led, der ikke står noget x eller y på som koefficient. Derfor kan vi opstille ligninger på baggrund af det grønne, gule og lilla led

$$-4 \cdot x = -2 \cdot a \cdot x$$

$$6 \cdot y = -2 \cdot b \cdot y$$

$$4 = a^2 + b^2 - r^2$$

Disse ligninger kan løses for at finde a, b og r:

$$a = -\frac{4}{-2} = 2$$

$$b = -\frac{6}{2} = -3$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - 4} = \sqrt{2^2 + 3^2 - 4} = \sqrt{4 + 9 - 4} = \sqrt{9} = 3$$